No. Date 30/10/17

Απ 1.

$\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Απόδειξη

Διωνυμικό αναπτ. Newton

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n$

όπου $\binom{n}{k} \overset{\text{ορ}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad 1 \leq k \leq n$

$a, b \in \mathbb{R}$

Φανερά $\sqrt[n]{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \exists\, \theta_n \geq 1 : \sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n,\ n \in \mathbb{N} \quad (\theta_n = \sqrt[n]{n} - 1)$

$\rightarrow n = (1+\theta_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \theta_n^2$

$\rightarrow \theta_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$

$\rightarrow 0 \leq \theta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$

Εφαρμόζουμε: Εάν $a_n \geq 0$ και $a_n \to \ell$
$\rightarrow \sqrt{a_n} \to \sqrt{\ell}$

Ξέρω $\frac{1}{N} \to 0 \quad N \to \infty$

Θέτω $N = n-1$, όπου $N \to \infty \rightarrow n \to \infty$

$\rightarrow \frac{1}{n-1} \to 0 \overset{\text{προτ}}{\rightarrow} \sqrt{\frac{1}{n-1}} \to 0$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{n-1}} \to 0$

Άρα $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής το θ_n συγκλίνει στο 0.

$\lim(\sqrt[n]{n} - 1) = 0 \qquad \sqrt[n]{n} = 1 \oplus (\sqrt[n]{n} - 1)$ Θα συγκλίνει στο 1

Παρατήρηση: Αν $a, b \geq 0$

$\rightarrow (a+b)^n \geq a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2$

$\frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

$(a+b)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \qquad a, b \geq 0$

$\rightarrow a = 1,\ b = \theta_n$

Η ανισότητα Bernoulli προκύπτει από το ανάπτυγμα Newton

No. Date

Άσκηση: $\frac{n}{4^n} \to 0$ Να δειχθεί με βελτιωμένη ανισ. Bernoulli

3) Έστω a_n ακολουθία με $a_n \geq 0$ και $a_n \to a > 0$

Ν.Δ.Ο. $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$

$a_n \to a > 0$

$\curvearrowright \exists n_0 \quad \frac{a}{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}a \;, n \geq n_0$

(από ορισμό για $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$)

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{a}{2}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}}_{\to 1} \quad n \geq n_0$$

από κρ. παρεμβολής

4) Έστω $k > 0$ ακέραιος σταθερός

$a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 > 0$ σταθεροί

Τότε $\lim \sqrt[n]{\underbrace{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}_{k+1 \text{ όροι}}} = 1$

$$\sqrt[n]{n^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \frac{a_{k-2}}{n^2} + \ldots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{n^k} \sqrt[n]{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^k}}$$

$$= (\sqrt[n]{n})^k \sqrt[n]{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^k}}$$

$$= (\sqrt[n]{n})^k \sqrt[n]{b_n}$$

$\boxed{b_n : \text{το υπόριζο}}$

$b_n \to a_k > 0 \curvearrowright \sqrt[n]{b_n} \to 1$

http://www.tanenghong.com

No. Date

$\sqrt[n]{n} \to 1$

Αν $a_n \to l$

$b_n \to m$

$c_n \to v$

$\to \lim a_n b_n c_n = lmv$

$\left(\sqrt[n]{n}\right)^k \to \overbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1}^{k \text{ φορές}}$

Άσκηση: Έστω $w \in \mathbb{R}$ με $|w|<1$ Τότε για $a_n = w^n$

Έχω $a_n \to 0$ $w=0$ $|w|>0$ $\frac{1}{|w|}>1$ $\frac{1}{|w|} = 1+\theta$.

J. Nash απέδειξε ένα Θεώρημα διαφορικών εξισώσεων
Το ίδιο Θεώρημα (σε άλλη μορφή) έχει δειχθεί από τον De Giorgi ('50)

Αν $a_{n+1} = A^n \cdot a_n^p$ με $A>1$ και $p>1$ με $a_1>0$
Αν το a_1 αρκετά μικρό τότε $a_n \to 0$

(*) $\forall M>1$ ισχύει $a_k \leq M^{-k}$ αρκεί το a_1 να είναι μικρό

Θα δείξω ότι η (*) ισχύει για $k=1$
δηλαδή $a_1 \leq M^{-1}$
που ισχύει αν επιλέξω $a_1 = M^{-1}$

Έστω (*) ισχύει για k δηλαδή $a_k \leq M^{-k}$
Θ.δ.ο. ισχύει για $k+1$ ($a_{k+1} \leq M^{-(k+1)}$)

$a_{k+1} \leq A^k \cdot a_k^p \leq A^k (M^{-k})^p = A^k M^{-kp} = A^k M^{-kp} M^{k+1} M^{-(k+1)} \left(A M^{\frac{1}{k}-(p-1)}\right)^k \cdot M$

Αρκεί $AM^{\frac{1}{k}-(p-1)} < 1$

$A \cdot M^{-(p-1)} \; M^{1/k}$

Εαν επέλεγα $M = A^{p-1}$ $\rightarrow$ $\leq M^{1/k}$

Επιλέγω $M = 2A^{p-1}$ και k_0 έτσι ώστε $M^{1/k} \leq 2$ $k \geq k_0$

Με αυτές τις επιλογές έχω ότι η επαγωγή δουλεύει από k_0 και μετά

Απομένει να δείξω ότι η επαγωγή δουλεύει από 1 μέχρι k_0 και αυτό θα δειχθεί για a_1 αρκετά μικρό

Εστω M, k_0 όπως παραπάνω

Αν a_1 αρκετά μικρό

$\rightarrow$ $a_n \leq M^{-k_0}$ $1 \leq n_0 \leq k_0$

$a_{n+1} = A^n \cdot a_n^p$

$a_1 = 0$